Контрольная работа
Часть 1: теория вероятностей

Задача №1

Партия из n_1 изделий содержит k_1 бракованных изделий. Какова вероятность того, что среди выбранных наудачу m_1 изделий ровно l_1 окажутся бракованными?

Решение

Решение аналогичной задачи приведено в лекции 1 (пример 4).

Применим классическую схему. Пусть A – событие, состоящее из выборок, содержащих l_1 бракованных изделия и m_1-l_1 качественных. Число элементарных событий, благоприятствующих событию A равно $|A| = C_{k_1}^{l_1} \cdot C_{n_1-k_1}^{m_1-l_1}$, а $n = |\Omega| = C_{n_1}^{m_1}$. Таким образом,

$$P(A) = \frac{|A|}{n} = \frac{C_{k_1}^{l_1} \cdot C_{n_1-k_1}^{m_1-l_1}}{C_{n_1}^{m_1}}.$$

Расчёт биномиальных коэффициентов производится по формуле (2). (При этом полагаем 0!=1.)

□

Задача №2

В первой урне n_2 белых и m_2 чёрных шара, а во второй урне n_3 белых и m_3 чёрных шаров. Из первой урны случайным образом взяли m_1 шаров, а из второй – l_1 шаров. Найти вероятность, что среди извлечённых шаров;

а) все шары одного цвета;

б) хотя бы один белый шар.

Решение

Шары вынимали из обеих урн независимо. Испытаниями являются извлечение m_1 шаров из первой урны и l_1 шаров из второй. Элементарными событиями будут сочетания по m_1 шаров из $n_2 + m_2$ и по l_1 шаров из $n_3 + m_3$. Вычислим количество всех выборок из первой и второй урн, которые обозначим n_1 и n_2 соответственно:

$$n_1 = C_{n_2+m_2}^{m_1},\ n_2 = C_{n_3+m_3}^{l_1}.$$

а) Пусть событие A – все вынутые шары одного цвета. Рассмотрим события:

B_1 – из первой урны извлекли m_1 белых шаров;

B_2 –из первой урны извлекли m_1 чёрных шаров;

C_1 – из второй урны извлекли l_1 белых шаров;

C_2 – из второй урны извлекли l_1 чёрных шаров.

При этом событие A выражается через остальные следующим образом:

$$A = B_1 \cdot C_1 + B_2 \cdot C_2 .$$

Учитывая независимость и несовместность событий, а также следствие из второго свойства вероятности, получим:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(C_1) + P(B_2) \cdot P(C_2).$$

Вычислим количество элементарных событий, благоприятствующих наступлению каждого события, вошедшего в полученную формулу:

$$|B_1| = C_{n_2}^{m_1} ; \ |B_2| = C_{m_2}^{m_1} ; \ |C_1| = C_{n_3}^{l_1} ; \ |C_2| = C_{m_3}^{l_1} .$$

Следовательно,

$$P(A) = \frac{C_{n_2}^{m_1}}{C_{n_2+m_2}^{m_1}} \cdot \frac{C_{n_3}^{l_1}}{C_{n_3+m_3}^{l_1}} + \frac{C_{m_2}^{m_1}}{C_{n_2+m_2}^{m_1}} \cdot \frac{C_{m_3}^{l_1}}{C_{n_3+m_3}^{l_1}} .$$

б) Пусть событие B – извлекли хотя бы один белый шар. Тогда событие $\overline{B}$ – извлекли только чёрные шары. По первому свойству вероятности $P(B) = 1 - P(\overline{B})$. Из пункта а) ясно, что $\overline{B} = B_2 \cdot C_2$. Поэтому

$$P(B) = 1 - \frac{C_{m_2}^{m_1}}{C_{n_2+m_2}^{m_1}} \cdot \frac{C_{m_3}^{l_1}}{C_{n_3+m_3}^{l_1}} .$$

□

Задача №3

Устройство состоит из трёх независимо функционирующих элементов, работающих в течение времени T безотказно соответственно с вероятностями p_1, p_2, p_3. Найти вероятность того, что за время T выйдет из строя ровно два элемента.

Решение

Пусть событие A – за время T вышло из строя ровно два элемента. Рассмотрим события A_i (i=1,2,3), состоящие в том, что за это время i–й элемент вышел из строя. Тогда противоположные им события $\overline{A_i}$ заключаются в том, что i–й элемент не вышел из строя. Имеем:

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 .$$

Учитывая независимость элементов устройства и несовместность событий A_i и $\overline{A}_i$, а также свойства вероятности, получаем следующую формулу:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A}_3) + P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(A_3) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3).$$

Нам даны вероятности безотказной работы элементов, то есть событий $\overline{A}_i$. Воспользуемся первым свойством вероятности: $P(A_i) = 1 - P(\overline{A}_i)$ и тем, что $P(\overline{A}_i) = p_i$, $i = 1,2,3.$ Итак получим:

$$P(A) = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot p_3 + (1 - p_1) \cdot p_2 \cdot (1 - p_3) + p_1 \cdot (1 - p_2) \cdot (1 - p_3).$$

□

Задача №4

В одной урне n_2 белых и m_2 чёрных шаров, а в другой – n_3 белых и m_3 чёрных шаров. Из первой урны случайным образом вынимают два шара и опускают во вторую урну. После этого из второй урны также случайно вынимают три шара. Найти вероятность, что все шары, вынутые из второй урны, окажутся белые.

Решение

В этой задаче испытания происходят в два этапа: вначале случайным образом вынимают шары из первой урны и опускают во вторую, а затем случайно вынимают шары из второй урны.

Рассмотрим события:

A – из второй урны вынули три белых шара;

H_1 – из первой урны взяли два белых шара;

H_2 – из первой урны взяли 1 белый и 1 чёрный шар;

H_3 – из первой урны взяли два чёрных шара.

Совокупность событий $\{H_1, H_2, H_3\}$ является полной группой гипотез (определение 8). Используя формулу полной вероятности (5), получим:

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + P(A|H_3) \cdot P(H_3).$$

Общее число выборок из первой урны равно $C^2_{n_2+m_2}$, а из второй — $C^3_{n_3+m_3+2}$.

Вычислим количество элементарных событий, благоприятствующих наступлению гипотез:

$$|H_1| = C^2_{n_2}; \ |H_2| = n_2 \cdot m_2; \ |H_3| = C^2_{m_2}.$$

Если осуществилась гипотеза H_1, то во второй урне оказалось $n_3 + 2$ белых шара. Поэтому $P(A|H_1) = \dfrac{C^3_{n_3+2}}{C^3_{n_3+m_3+2}}$. Аналогично вычисляем:

$$P(A|H_2) = \frac{C^3_{n_3+1}}{C^3_{n_3+m_3+2}}, \ P(A|H_3) = \frac{C^3_{n_3}}{C^3_{n_3+m_3+2}}.$$

Таким образом, имеем:

$$P(A) = \frac{C^3_{n_3+2}}{C^3_{n_3+m_3+2}} \cdot \frac{C^2_{n_2}}{C^2_{n_2+m_2}} + \frac{C^3_{n_3+1}}{C^3_{n_3+m_3+2}} \cdot \frac{n_2 \cdot m_2}{C^2_{n_2+m_2}} + \frac{C^3_{n_3}}{C^3_{n_3+m_3+2}} \cdot \frac{C^2_{m_2}}{C^2_{n_2+m_2}}.$$

□

Задача №5

В пирамиде стоят n_1 винтовок, из них m_1 с оптическим прицелом. Стрелок, стреляя из винтовки с оптическим прицелом, может поразить мишень с вероятностью p_1, а стреляя из винтовки без оптического прицела, – с вероятностью p_2. Стрелок поразил мишень. Найти вероятность того, что при этом он стрелял из винтовки с оптическим прицелом.

Решение

В этой задаче первым испытанием является случайный выбор винтовки, вторым – стрельба по мишени. Рассмотрим следующие события:

A – стрелок поразил мишень;

H_1 – стрелок взял винтовку с оптическим прицелом;

H_2 – стрелок взял винтовку без оптического прицела.

Как следует из условия задачи, событие A уже осуществилось, то есть стрелок попал в мишень. Найти же нужно вероятность того, что при этом он стрелял из винтовки с оптическим прицелом, то есть условную вероятность $P(H_1|A)$. Используем формулу Байеса (6). Имеем:

$$P(H_1|A)=\frac{P(A|H_1)\cdot P(H_1)}{P(A|H_1)\cdot P(H_1)+P(A|H_2)\cdot P(H_2)}.$$

Используя классическое определение вероятности и учитывая, что выбирается одна винтовка, найдём вероятности гипотез H_1 и H_2. Получим:

$$P(H_1)=\frac{m_1}{n_1} \text{ и } P(H_2)=\frac{n_1-m_1}{n_1}.$$

Условные вероятности, входящие в формулу, заданы в условии задачи.

Следовательно: $P(H_1|A)=\dfrac{p_1\cdot\frac{m_1}{n_1}}{p_1\cdot\frac{m_1}{n_1}+p_2\cdot\frac{n_1-m_1}{n_1}}$.

□

Задача №6

Игральная кость бросается m_1 раз. Найти вероятность, что при этом шестёрка выпала ровно l_1 раз.

Решение

Решение аналогичной задачи приведено в лекции 4 (пример 15).

При каждом бросании будем считать успехом выпадение шестёрки, а неудачей – выпадение любого другого числа. Тогда мы попадаем в рамки схемы Бернулли с $n=m_1, m=l_1, p=\frac{1}{6}, q=\frac{5}{6}$. Используя формулу (12), получаем: $P(H_{l_1})=C_{m_1}^{l_1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{l_1}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{m_1-l_1}$.

□

Задача №7

На телефонной станции неправильное соединение происходит с вероятностью $\frac{1}{n_1}$. Найти вероятность, что среди $l_1\cdot n_1$ соединений произойдёт:

а) точно одно неправильное соединение;

б) больше чем два неправильных соединения.

Решение

Так как вероятность события мала, а количество испытаний велико, можно использовать формулу Пуассона (75).

Здесь $p = \frac{1}{n_1}$, $n = l_1 \cdot n_1$, $a = np = l_1$.

а) Применяя формулу (75), получим: $B_{\frac{1}{n_1}}(l_1 \cdot n_1, 1) \approx l_1 \cdot e^{-l_1}$.

б) Решение аналогичной задачи приведено в лекции 10 (пример 42). Искомая вероятность равна:

$$P(\mu_{l_1 \cdot n_1} > 2) = 1 - P(\mu_{l_1 \cdot n_1} = 0) - P(\mu_{l_1 \cdot n_1} = 1) - P(\mu_{l_1 \cdot n_1} = 2) =$$
$$= 1 - B_{\frac{1}{n_1}}(l_1 \cdot n_1, 0) - B_{\frac{1}{n_1}}(l_1 \cdot n_1, 1) - B_{\frac{1}{n_1}}(l_1 \cdot n_1, 2).$$

Используя приближённую формулу (75), имеем:

$$B_{\frac{1}{n_1}}(l_1 \cdot n_1, 0) \approx e^{-l_1},\ B_{\frac{1}{n_1}}(l_1 \cdot n_1, 1) \approx l_1 \cdot e^{-l_1},\ B_{\frac{1}{n_1}}(l_1 \cdot n_1, 2) \approx \frac{l_1^2}{2} \cdot e^{-l_1}.$$

Поэтому $P(\mu_{l_1 \cdot n_1} > 2) \approx 1 - \left(1 + l_1 + \frac{l_1^2}{2}\right) e^{-l_1}$.

□

Задача №8

Случайная величина X задана законом распределения:

X	x_1	x_2	x_3
P	p_4	p_5	p

Найти p, функцию распределения $F(x)$ с.в. X, построить её график. Вычислить для с.в. X математическое ожидание MX и дисперсию DX.

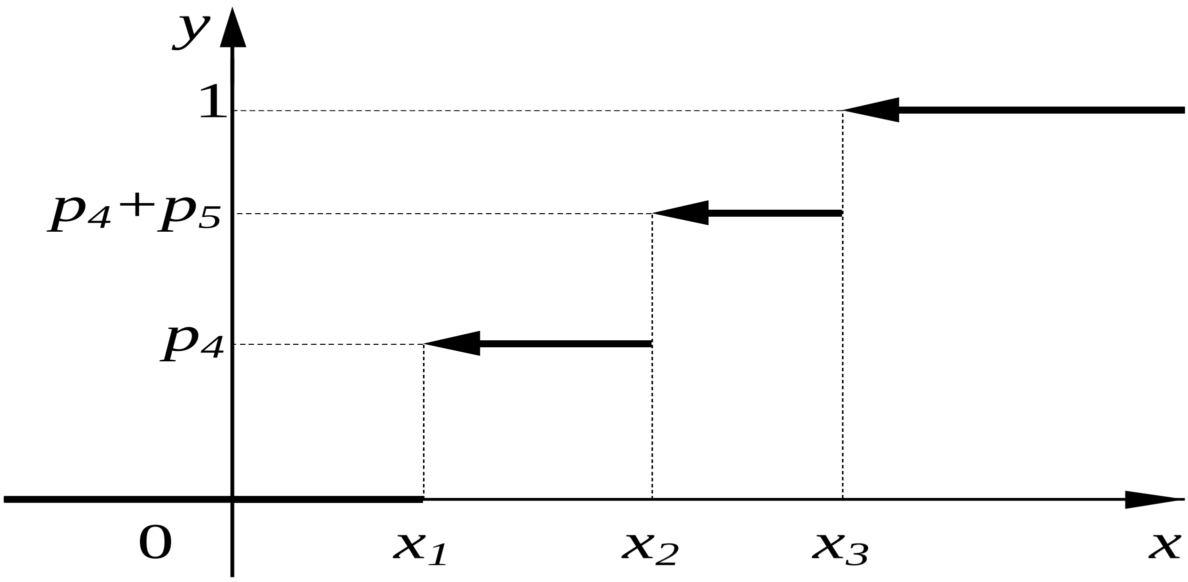
Решение

Из определения закона распределения (определение 12) известно, что сумма чисел в нижнем ряду таблицы должна равняться единице. Исходя из этого, найдём неизвестный параметр p: $p = 1 - p_4 - p_5$.

Для того,чтобы найти функцию распределения, воспользуемся формулой (37) из определения функции распределения (определение 20). Получим:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \textit{если } x \le x_1, \\ p_4, \textit{если } x_1 < x \le x_2, \\ p_4 + p_5, \textit{если } x_2 < x \le x_3, \\ 1, \textit{если } x > x_3. \end{cases}$$

График функции $y = F(x)$ имеет вид:



Найдём математическое ожидание по формуле (13). Получим:

$$MX = x_1 p_4 + x_2 p_5 + x_3 (1 - p_4 - p_5).$$

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулой (21). Имеем:

$$DX = x_1^2 p_4 + x_2^2 p_5 + x_3^2 (1 - p_4 - p_5) - \left(x_1 p_4 + x_2 p_5 + x_3 (1 - p_4 - p_5)\right)^2 .$$

Задача №9

Случайная величина X задана следующей плотностью распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, \ \textit{если} \ \ x \le 0, \\ \dfrac{x}{l_1}, \textit{если} \ \ 0 < x \le \sqrt{2l_1}, \\ 0, \ \textit{если} \ \ x > \sqrt{2l_1}. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$ с.в. X, построить графики функций $p(x)$ и $F(x)$. Вычислить для с.в. X её математическое ожидание MX и дисперсию DX.

Решение

Функцию распределения непрерывной случайной величины найдём по формуле (44), воспользовавшись также свойствами функции распределения. Отдельно вычислим функцию распределения на интервале $\left(0, \sqrt{2l_1}\right]$. Получим:

$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{l_1} dt = \left. \frac{t^2}{2l_1} \right|_0^x = \frac{x^2}{2l_1}, \ 0 < x \le \sqrt{2l_1} .$$

Таким образом, на всей области определения имеем:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ \textit{если}\ \ x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{2l_1},\textit{если}\ \ 0<x\le\sqrt{2l_1},\\ 1,\ \textit{если}\ \ \ x>\sqrt{2l_1}.\end{cases}$$

Построим графики заданной плотности распределения с.в. X и найденной функции распределения. (Требуется выполнить точные построения согласно данным варианта!)

График плотности $p(x)$ имеет вид:

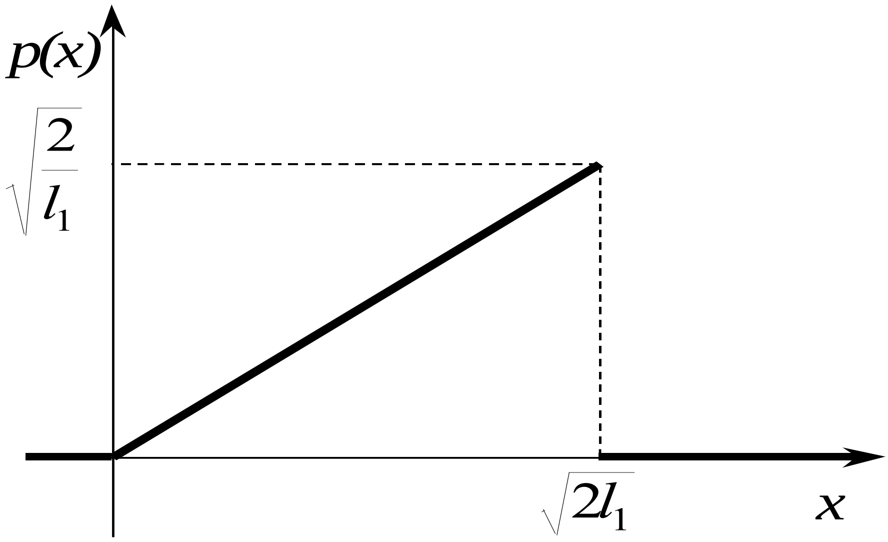
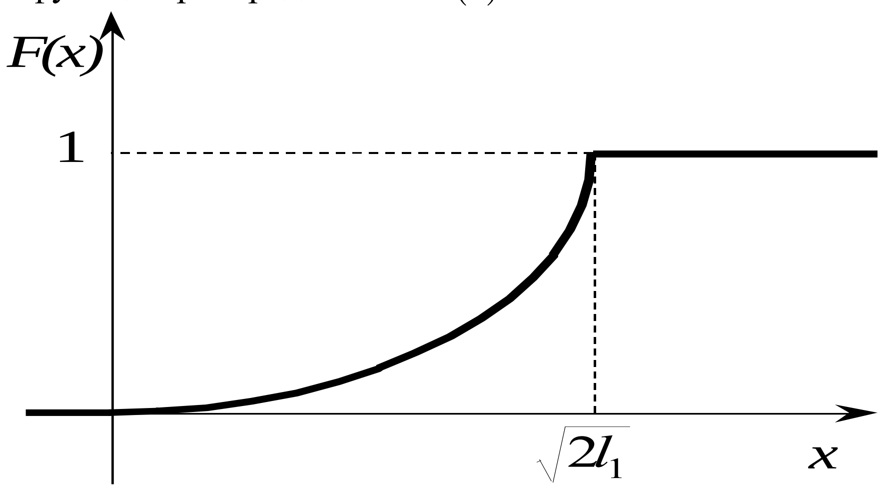


График функции распределения $F(x)$:



Математическое ожидание вычислим по формуле (49):

$$MX=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_0^{\sqrt{2l_1}}x\cdot\frac{x}{l_1}dx=\frac{x^3}{3l_1}\Bigg|_0^{\sqrt{2l_1}}=\frac{2}{3}\sqrt{2l_1}\,.$$

Для нахождения дисперсии с.в. X воспользуемся формулами (21) и (49). Получим:

$$DX=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx-(MX)^2=\int_0^{\sqrt{2l_1}}x^2\cdot\frac{x}{l_1}dx-\left(\frac{2}{3}\sqrt{2l_1}\right)^2=\frac{x^4}{4l_1}\Bigg|_0^{\sqrt{2l_1}}-\frac{8}{9}l_1=\frac{1}{9}l_1.\quad\square$$

Задача №10

Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 0,\\ \dfrac{x}{x_3}, \text{ если } 0<x\le x_3,\\ 1, \text{ если } x>x_3.\end{cases}$$

Найти плотность распределения $p(x)$ с.в. X. Построить графики функций $p(x)$ и $F(x)$. Вычислить для с.в. X её математическое ожидание MX и дисперсию DX.

Решение

Плотность распределения с.в. X вычислим по формуле (42):

$$p(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<0,\\ \dfrac{1}{x_3}, \text{ если } 0<x<x_3,\\ 0, \text{ если } x>x_3.\end{cases}$$

Продолжение решения задачи аналогично решению предыдущей задачи – проделайте это самостоятельно!

□

Пояснение

Номер варианта совпадает с последней цифрой зачётной книжки. Данные параметров содержатся в следующей таблице:

Таблица данных для вариантов

№	n_1	k_1	m_1	l_1	n_2	m_2	n_3	m_3	x_1	x_2	x_3	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
1	100	20	8	3	9	10	4	5	-1	0	5	0,85	0,63	0,9	0,4	0,3
2	105	21	9	4	10	10	5	6	0	1	4	0,86	0,64	0,91	0,3	0,6
3	110	22	10	5	11	12	6	7	1	2	7	0,87	0,65	0,92	0,2	0,4
4	115	23	9	6	9	10	7	9	2	4	8	0,88	0,66	0,93	0,4	0,1
5	120	24	8	7	9	10	8	9	-1	1	6	0,89	0,67	0,94	0,5	0,3
6	125	25	7	3	8	9	5	7	0	3	9	0,9	0,68	0,95	0,7	0,1
7	130	26	8	5	10	11	6	8	1	3	4	0,91	0,69	0,96	0,6	0,2
8	135	27	9	8	9	10	10	9	2	5	10	0,92	0,7	0,97	0,1	0,5
9	140	28	10	7	11	12	8	10	-1	2	3	0,93	0,71	0,98	0,8	0,1
0	145	29	10	6	12	11	8	9	0	3	7	0,94	0,72	0,99	0,3	0,4

Часть 2: математическая статистика

Задача 1

В результате проведения исследований получены следующие статистические данные (табл.1), где m_i – частота попадания вариант в промежуток $(x_i, x_{i+1}]$. Для выборки построить гистограмму относительных частот.

Задача 2

Вычислить числовые характеристики выборки (мода, медиана, выборочное среднее, выборочная дисперсия, среднее квадратическое отклонение, начальные и центральные моменты) и найти несмещенные оценки генерального среднего и генеральной дисперсии на основании данного распределения выборки (табл.2).

Задача 3

Найти доверительный интервал для неизвестного математического ожидания a случайной величины X, распределенной нормально, если известны объем выборки n, выборочное среднее $\overline{X}$, надежность γ и среднее квадратическое отклонение $\hat{\sigma}_X$ (табл.3).

Задача 4

Генеральная совокупность имеет нормальное распределение, для которого известно значение параметра σ. Найти наименьший объем выборки, при котором доверительный интервал длиной l покрывает параметр a с надежностью γ (табл.4).

Задача 5

Найти доверительный интервал для неизвестного среднего квадратического отклонения σ нормально распределенной случайной величины X, если известны объем выборки n, надежность γ и выборочная дисперсия $\hat{D}X$ (табл.5).

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача 1

В результате проведения исследований получены следующие статистические данные (табл.1), где m_i – частота попадания вариант в промежуток (x_i, x_{i+1}]. Для выборки построить гистограмму относительных частот.

i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i
1	1 – 3	18
2	3 – 5	10
3	5 – 7	12
4	7 – 9	11
5	9 – 11	9

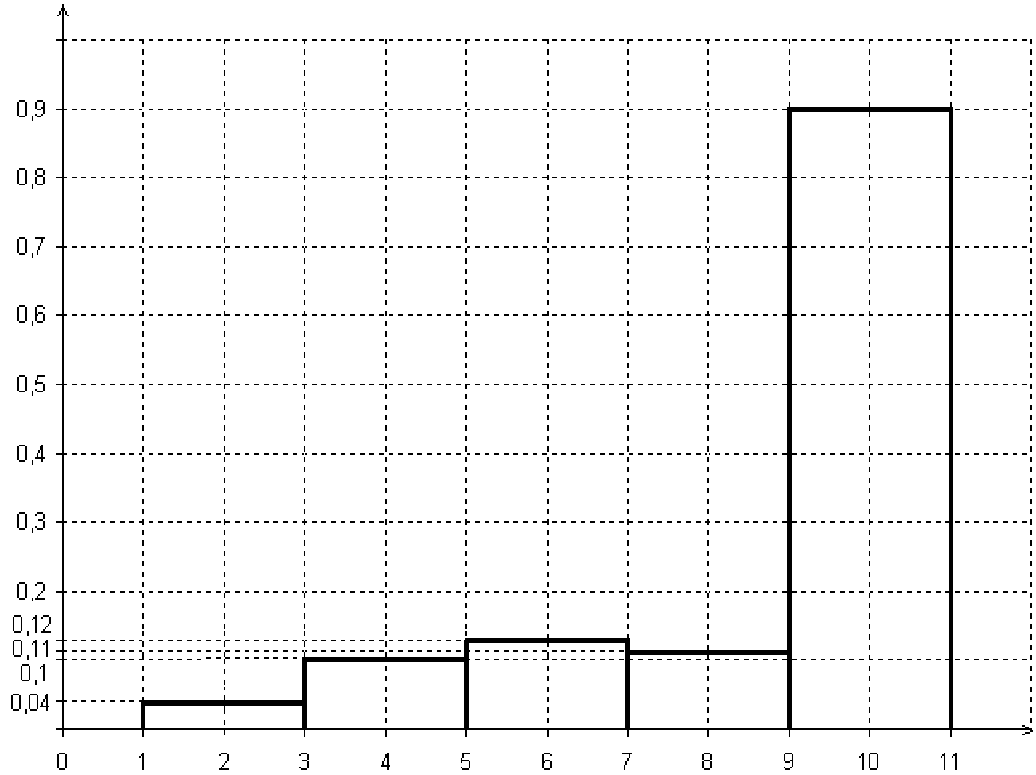
Решение.

Объём выборки n=50. Найдём относительные частоты:

w_1=4/50=0,08, w_2=10/50=0,2, w_3=12/50=0,24, w_4=11/50=0,22, w_5=9/50=0,18.
Найдём плотности относительных частот, учитывая, что длина интервала h=2:
w_1/h=0,08/2=0,04, w_2/h=0,2/2=0,1, w_3/h=0,24/2=0,12, w_4/h=0,22/2=0,11,
w_5/h=0,18/2=0,9.

Построим на оси абсцисс данные частичные интервалы. Проведем над этими интервалами отрезки, параллельные оси абсцисс и находящиеся от неё на расстояниях, равных соответствующим плотностям относительной частоты.

Например, над интервалом (1,3) проведем отрезок, параллельный оси абсцисс и находящийся от неё на расстоянии, равном 0,04; аналогично строят остальные отрезки. Искомая гистограмма относительных частот изображена на рисунке ниже.



Задача 2

В ходе эксперимента получены данные наблюдений:

x_i	14	15	16	17	18	19	20
n_i	6	10	18	28	20	12	6

Для данной выборки выполнить следующее:

- Вычислить числовые характеристики выборки (мода, медиана, выборочное среднее, выборочная дисперсия, среднее квадратическое отклонение, начальные и центральные моменты);
- Найти несмещенные оценки генерального среднего и генеральной дисперсии.

Решение.

Найдем числовые характеристики данной выборки:

1. Минимальное и максимальное значение выборки: $x_{min}=14,\ x_{max}=20$.
2. Размах выборки: $R=x_{max}-x_{min}=20-14=6$.
3. Мода: $M_0=x_4=17$.
4. Так как вариационный ряд содержит четное число вариант ($n=100$), то медиана $M_e=\dfrac{x_{50}+x_{51}}{2}=\dfrac{17+17}{2}=17$.
5. Выборочное среднее:
$$\overline{X}=\frac{14\cdot 6+15\cdot 10+16\cdot 18+17\cdot 28+18\cdot 20+19\cdot 12+20\cdot 6}{100}=17{,}06.$$

6. Выборочная дисперсия: $\hat{D}X=\dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)^2\cdot n_i$

$$\hat{D}X=\frac{1}{100}\cdot(\left(14-17{,}06\right)^2\cdot 6+\left(15-17{,}06\right)^2\cdot 10+\left(16-17{,}06\right)^2\cdot 18+$$
$$+\left(17-17{,}06\right)^2\cdot 28+\left(18-17{,}06\right)^2\cdot 20+\left(19-17{,}06\right)^2\cdot 12+\left(20-17{,}06\right)^2\cdot 6)=2{,}33$$
.

7. Среднее квадратическое отклонение: $\hat{\sigma}_x=\sqrt{\hat{D}X}=\sqrt{2{,}33}=1{,}53$.

8. Начальные моменты: $m_0=1,\ m_1=\overline{X}=17{,}06$,

$$m_2=\frac{1}{100}\cdot\left(14^2\cdot 6+15^2\cdot 10+16^2\cdot 18+17^2\cdot 28+18^2\cdot 20+19^2\cdot 12+20^2\cdot 6\right)=293{,}38,$$
$$m_3=\frac{1}{100}\cdot\left(14^3\cdot 6+15^3\cdot 10+16^3\cdot 18+17^3\cdot 28+18^3\cdot 20+19^3\cdot 12+20^3\cdot 6\right)=5084{,}54,$$
$$m_4=\frac{1}{100}\cdot\left(14^4\cdot 6+15^4\cdot 10+16^4\cdot 18+17^4\cdot 28+18^4\cdot 20+19^4\cdot 12+20^4\cdot 6\right)=88783{,}54.$$

9. Центральные моменты: $\mu_0=1,\ \mu_1=0,\ \mu_2=\hat{D}X=2{,}33$,

$$\mu_3=\frac{1}{100}\cdot(\left(14-17{,}06\right)^3\cdot 6+\left(15-17{,}06\right)^3\cdot 10+\left(16-17{,}06\right)^3\cdot 18+$$
$$+\left(17-17{,}06\right)^3\cdot 28+\left(18-17{,}06\right)^3\cdot 20+\left(19-17{,}06\right)^3\cdot 12+\left(20-17{,}06\right)^3\cdot 6)=-0{,}24,$$
$$\mu_4=\frac{1}{100}\cdot(\left(14-17{,}06\right)^4\cdot 6+\left(15-17{,}06\right)^4\cdot 10+\left(16-17{,}06\right)^4\cdot 18+$$
$$+\left(17-17{,}06\right)^4\cdot 28+\left(18-17{,}06\right)^4\cdot 20+\left(19-17{,}06\right)^4\cdot 12+\left(20-17{,}06\right)^4\cdot 6)=13{,}66.$$

Несмещенной оценкой генерального среднего является выборочное среднее.
$$\overline{X}=\frac{14\cdot 6+15\cdot 10+16\cdot 18+17\cdot 28+18\cdot 20+19\cdot 12+20\cdot 6}{100}=17{,}06.$$
Для вычисления выборочной дисперсии воспользуемся формулой:
$$\hat{D}X=\overline{X}^2-\left(\overline{X}\right)^2.$$

$$\overline{X}^2=\frac{14^2\cdot 6+15^2\cdot 10+16^2\cdot 18+17^2\cdot 28+18^2\cdot 20+19^2\cdot 12+20^2\cdot 6}{100}=293{,}38,$$

$\hat{D}X=293{,}38-(17{,}06)^2=2{,}3364$.

Находим несмещенную оценку дисперсии («исправленную» выборочную дисперсию): $\hat{S}^2=\dfrac{n}{n-1}\hat{D}X=\dfrac{100}{99}\cdot 2{,}3364=2{,}36$.

Задача 3

Найти доверительный интервал для неизвестного математического ожидания a случайной величины X, распределенной нормально, если известны объем выборки n=30, выборочное среднее $\overline{X}=5$, надежность $\gamma=0{,}99$ и среднее квадратическое отклонение $\hat{\sigma}_X=5$.

Решение.

Построим доверительный интервал для математического ожидания при неизвестном параметре σ. Воспользуемся формулой (30):

$$\left(\overline{X}-\frac{\hat{S}\cdot t_{\gamma,n-1}}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+\frac{\hat{S}\cdot t_{\gamma,n-1}}{\sqrt{n}}\right).$$

Для заданных $\gamma=0{,}99$ и $n=30$ найдем значение $t_{\gamma,n-1}=2{,}756$ (см. Приложение 6). Тогда получим интервал, покрывающий a с надежностью 0,99:

$$\left(5-\frac{5\cdot 2{,}756}{\sqrt{29}};5+\frac{5\cdot 2{,}756}{\sqrt{29}}\right)=(2{,}441;\ 7{,}559).$$

Задача 4

Генеральная совокупность имеет нормальное распределение, для которого известно значение параметра $\sigma=1{,}5$. Найти наименьший объем выборки, при котором доверительный интервал длиной $l=0{,}8$ покрывает параметр a с надежностью γ=0,95.

Решение.

Доверительный интервал для математического ожидания при известном параметре σ определяется формулой (25): $\left(\overline{X}-U_\gamma\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}};\overline{X}+U_\gamma\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ или $(\overline{X}-\varepsilon,\overline{X}+\varepsilon)$, где $\varepsilon=U_\gamma\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. По условию $l=0{,}8$, значит, $\varepsilon={}^{l}\!/\!_{2}=0{,}4$. Величину U_γ найдем из уравнения $2\Phi(U_\gamma)=\gamma=0{,}95\Rightarrow U_\gamma=1{,}96$ (см. Приложение 2). Тогда $\varepsilon=U_\gamma\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\Rightarrow 0{,}4=1{,}96\cdot\dfrac{1{,}5}{\sqrt{n}}\Rightarrow n=\left(\dfrac{1{,}96\cdot 1{,}5}{0{,}4}\right)^2=54{,}02$.

Следовательно, наименьшим объемом выборки будет $n=55$.

Задача 5

Найти доверительный интервал для неизвестного среднего квадратического отклонения σ нормально распределенной случайной величины X, если известны объем выборки n=20, надежность $\gamma = 0{,}95$ и выборочная дисперсия $\hat{D}X = 2{,}56$.

<u>Решение.</u>

Доверительный интервал для неизвестного среднего квадратического отклонения σ определяется формулой (37): $I_\sigma = \left(\hat{S} - \hat{S} \cdot q_\gamma ; \hat{S} + \hat{S} \cdot q_\gamma\right)$.

Вычислим $\hat{S}^2 = \dfrac{n}{n-1}\hat{D}X = \dfrac{20}{19} \cdot 2{,}56 = 2{,}6947$, тогда $\hat{S} = \sqrt{\hat{S}^2} = 1{,}642$. Найдем величину q_γ по известному $\gamma = 0{,}95$ (см. Приложение 7): $q_\gamma = 0{,}37$. Следовательно, интервал $(1{,}642 - 1{,}642 \cdot 0{,}37; 1{,}642 + 1{,}642 \cdot 0{,}37) = (1{,}034; 2{,}249)$ является доверительным для параметра σ с надежностью $\gamma = 0{,}95$.

ПОЯСНЕНИЕ

Номер варианта в контрольной работе №8 совпадает с последней цифрой номера зачетной книжки.

Таблица 1. Варианты задачи 1.

Вариант	i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i		Вариант	i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i
	1	3 – 7	4			1	4 – 6	3
	2	7 – 11	6			2	6 – 8	9
1	3	11 – 15	9		6	3	8 – 10	7
	4	15 – 19	10			4	10 – 12	22
	5	19 – 23	11			5	12 – 14	9
	1	4 – 8	5			1	1 – 5	4
	2	8 – 12	7			2	5 – 9	5
2	3	12 – 16	10		7	3	9 – 13	9
	4	16 – 20	12			4	13 – 17	10
	5	20 – 24	6			5	17 – 21	2
	1	2 – 4	5			1	5 – 7	4
	2	4 – 6	8			2	7 – 9	14
3	3	6 – 8	16		8	3	9 – 11	12
	4	8 – 10	12			4	11 – 13	8
	5	10 – 12	9			5	13 – 15	2
	1	7 – 9	5			1	2 – 5	5
	2	9 – 11	4			2	5 – 8	24
4	3	11 – 13	8		9	3	8 – 11	13
	4	13 – 15	12			4	11 – 14	1
	5	15 – 17	11			5	14 – 17	6
5	1	5 – 8	5		0	1	3 – 7	6
	2	8 – 11	7			2	7 – 11	8

	3	11 – 14	4			3	11 – 15	10
	4	14 – 17	1			4	15 – 19	12
	5	17 –20	3			5	19 – 23	4

Таблица 2. Варианты задачи 2.

Вариант	Распределение						Вариант	Распределение				
1	x_i	-6	-2	3	6		6	x_i	4	8	10	14
	n_i	12	14	16	8			n_i	12	24	38	26
2	x_i	-10	-5	-1	4		7	x_i	2	6	8	9
	n_i	25	44	16	15			n_i	20	13	12	5
3	x_i	4	8	16	24		8	x_i	3	6	8	14
	n_i	31	14	28	27			n_i	8	14	16	18
4	x_i	-3	1	4	8		9	x_i	10	14	16	22
	n_i	12	13	10	25			n_i	13	24	14	9
5	x_i	16	20	22	30		0	x_i	-6	-2	2	5
	n_i	14	26	17	3			n_i	11	13	14	12

Таблица 3. Варианты задачи 3.

Вариант	n	$\overline{X}$	γ	$\hat{\sigma}_X$		Вариант	n	$\overline{X}$	γ	$\hat{\sigma}_X$
1	100	68	0,9	3		6	50	5	0,9	2
2	50	20,2	0,99	0,7		7	100	70	0,99	3
3	25	5	0,95	2		8	100	22	0,9	0,8
4	50	6	0,95	1		9	50	72	0,9	4
5	50	66	0,95	2,8		0	100	135	0,9	5

Таблица 4. Варианты задачи 4.

Вариант	l	σ	γ		Вариант	l	σ	γ
1	1,8	5	0,9		6	0,8	2,4	0,95
2	2	4	0,9		7	1,2	6	0,95
3	4	3	0,9		8	4	3	0,95
4	3	5	0,9		9	2	4	0,95
5	2	6	0,9		0	1,6	5	0,95

Таблица 5. Варианты задачи 5.

Вариант	n	γ	$\hat{D}X$		Вариант	n	γ	$\hat{D}X$
1	30	0,95	9		6	20	0,99	16
2	20	0,95	16		7	40	0,99	4

3	50	0,95	4		8	30	0,99	25
4	40	0,95	9		9	50	0,99	4
5	30	0,95	16		0	30	0,99	9